2015年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

文科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	D	D	A	B	A	C	B	D	C

二、填空题（每小题5分，共20分）

（13）±1　（14）40　（15）2　（16）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$

三、解答题

(17) 解：（Ⅰ）由已知可得$\begin{cases}q+2+a_2=8\\2+a_2=(q+1)q\end{cases}$，消去$a_2$得：$q^2+2q-8=0$，

解得$q=2$或$q=-4$（舍），……3分

$\therefore a_2=4,d=2$，从而$a_n=2n,b_n=2^{n-1}$. ……6分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，则$c_n=2n(\frac{1}{2})^{n-1}$.

$T_n=2\times(\frac{1}{2})^0+4\times(\frac{1}{2})^1+\cdots+2(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2}+2n(\frac{1}{2})^{n-1}$.①

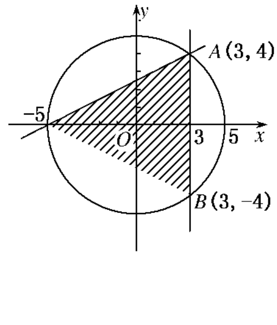
$\frac{1}{2}T_n=2\times(\frac{1}{2})^1+4\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+2(n-1)(\frac{1}{2})^{n-1}+2n(\frac{1}{2})^n$.②

①-②得$\frac{1}{2}T_n=2\times(\frac{1}{2})^0+2\times(\frac{1}{2})^1+2\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+2\times(\frac{1}{2})^{n-1}-2n\cdot(\frac{1}{2})^n$

$$=\frac{2[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-2n\cdot(\frac{1}{2})^n=4-(4+2n)(\frac{1}{2})^n$$

所以$T_n=8-(n+2)(\frac{1}{2})^{n-2}$.. ……12分

(18)解：（Ⅰ）由题意知，区域D在圆内，如图所示．设“在圆C内部或边界上任取一点，求点落在区域D内”为事件A，由于圆C的面积为25π，而区域D的面积为$\frac{1}{2}\times8\times8=32$，由几何概型概率计算公式可得,在圆$C$内部或边界上任取一点，落在区域$D$内的概率$P(A)=\frac{32}{25\pi}$. ……6分



（Ⅱ）设“在圆C内部或边界上任取一整点，整点落在区域D内”为事件B，由圆C的对称性，第一象限内及x轴正半轴上的整点有

$(4,1),(4,2),(4,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(5,0),(4,0),(3,0),(2,0),(1,0)$

共计20个，所以圆C内部或边界上整点共计$20\times4+1=81$个，其中落在区域D内的整点在x轴上方

的有

$(-3,1),(-2,1),(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)$

共计 16 个，根据区域 D 关于 x 轴对称，故落在区域 D 内的整点有 $16\times2+9=41$ 个，所以圆 C 内部或边界上任取一整点，整点落在区域 D 内的概率 $P(B)=\dfrac{41}{81}$.……………………………………………12 分

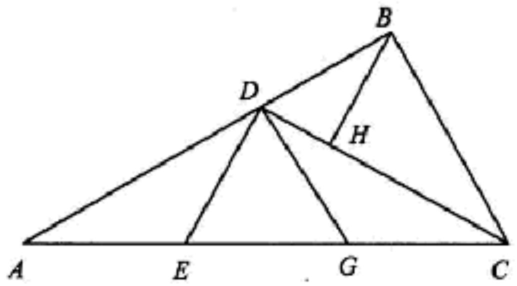
(19)解：（Ⅰ）在图 1 中，$\because AC=6, BC=3, \angle ABC=90°, \therefore \angle ACB=60°.$

因为 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，所以 $\angle BCD=\angle ACD=30°, \therefore CD=2\sqrt{3}.$……………………………2 分

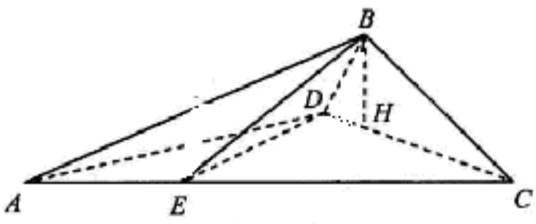
$\because CE=4, \angle DCE=30°, \therefore DE=2.$

则 $CD^2+DE^2=EC^2$，所以 $\angle CDE=90°, DE\perp DC.$………………………………………………………4 分

在图 2 中，又因为平面 $BCD\perp$ 平面 ACD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ACD=CD$，$DE\subset$ 平面 ACD，
所以 $DE\perp$ 平面 BCD.………………………………………………………………………………………6 分



19 题图 1



19 题图 2

（Ⅱ）在图 2 中，作 $BH\perp CD$ 于 H，因为平面 $BCD\perp$ 平面 ACD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ACD=CD$，
$BH\subset$ 平面 BCD，所以 $BH\perp$ 平面 ACD.…………………………………………………………8 分

在图 1 中，由条件得 $BH=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………………………9 分

所以三棱锥 $A-BDE$ 的体积

$V_{A-BDE}=V_{B-ADE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ADE}\cdot BH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\sin120°\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.……………………………12 分

(20) 解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$,其定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$,由 $f'(x)>0$ 得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{e},+\infty)$，

由 $f'(x)<0$ 得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1),(1,\sqrt{e})$.……………………………………………6 分

（Ⅱ）函数 $g(x)=tf(x)-x$ 在 $[\dfrac{1}{e},1)\cup(1,e^2]$ 上有两个零点,等价于 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 与 $y=t$ 在 $[\dfrac{1}{e},1)\cup(1,e^2]$ 上

有两个不同的交点.由 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ 得 $0<x<e$，$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ 得 $x>e$，所以当 $x=e$ 时 $y=h(x)$ 有极大值,即最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$.

又 $h(\frac{1}{e})=-e, h(e^2)=\frac{2}{e^2}, h(1)=0$ 且 $\frac{2}{e^2}>0>-e$，所以实数 t 的取值范围为 $[\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$. ……………12 分

(21) 解：（Ⅰ）由椭圆定义知，$4a=8$，即 $a=2$. ……………………………………………………1 分

由 $|F_2A_2|=1$ 得，$a-c=1$，所以 $c=1$，从而 $b^2=a^2-c^2=3$. ……………………………………4 分

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）显然直线 l 的斜率存在，故设其方程为 $y=k(x+3)$，又设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$,

由 $\begin{cases} y=k(x+3), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+24k^2x+36k^2-12=0$.

$\Delta=(24k^2)^2-4\times(3+4k^2)(36k^2-12)>0\Rightarrow 0<k^2<\frac{3}{5}$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{24k^2}{3+4k^2}$. ……………………………………………………………7 分

因为 $F_2(1,0)$，由 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2C}$ 得 $(1-x_1,-y_1)=\lambda(x_3-1,y_3)$, $\therefore x_3=1+\frac{1-x_1}{\lambda}, y_3=-\frac{y_1}{\lambda}$.

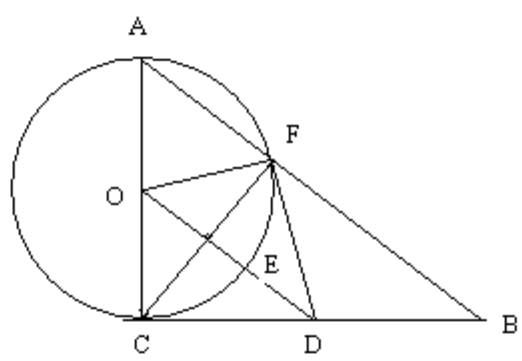
代入椭圆方程得 $\frac{(1+\frac{1-x_1}{\lambda})^2}{4}+\frac{(-\frac{y_1}{\lambda})^2}{3}=1$，与 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$ 联立消去 y_1 得 $x_1=\frac{5-3\lambda}{2}$.

同理可得 $x_2=\frac{5-3\mu}{2}$，所以 $x_1+x_2=\frac{10-3(\lambda+\mu)}{2}=-\frac{3}{2}$.

所以 $x_1+x_2=-\frac{24k^2}{3+4k^2}=-\frac{3}{2}$，解之得 $k^2=\frac{1}{4}\in(0,\frac{3}{5})$，所以 $k=\pm\frac{1}{2}$.

所求直线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}(x+3)$，

即 $x+2y+3=0$, 或 $x-2y+3=0$. …………12 分



（22） 证明：（Ⅰ）连接 CF, OF,因为 AC 为直径，则 $CF\perp AB$，

因为 O,D 分别为 AC,BC 的中点，所以 $OD\parallel AB$，

所以 $CF\perp OD$.

因为 $OF=OC$,则 $\angle EOF=\angle EOC$,且 $OD=OD$，

所以 $\Delta OCD\cong\Delta OFD$.

所以 $\angle OCD=\angle OFD=90^\circ$.

所以O,C,D,F四点共圆. ……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）设圆的半径为r，因为$OF\perp FD$，所以FD是圆的切线，

所以$DF^2=DE\cdot(DE+2r)=DE\cdot(DO+r)$

$=DE\cdot DO+DE\cdot r=DE\cdot\frac{1}{2}AB+DE\cdot\frac{1}{2}AC$.

故$2DF^2=DE\cdot AB+DE\cdot AC$. ……………………………………………………………10 分

23．解：（Ⅰ）由直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ 消去参数t得$y=\tan\alpha(x+1)$.

曲线C的极坐标方程为$\rho=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，展开得$\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$，化为直角坐标方程得

$x^2+y^2-2x-2y=0$，即$(x-1)^2+(y-1)^2=2$. ………………………………………………5 分

（Ⅱ）因为圆C的直角坐标方程$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆心为$(1,1)$，

则圆心到直线$y=\tan\alpha(x+1)$的距离$d=\frac{|2\tan\alpha-1|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{2-(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

化简得$7\tan^2\alpha-8\tan\alpha+1=0$，解之得$\tan\alpha=1$或$\tan\alpha=\frac{1}{7}$. ……………………………10 分

24．解：（Ⅰ）$\frac{1}{1+a}+\frac{4}{1+b}=\frac{1}{4}(\frac{1}{1+a}+\frac{4}{1+b})(1+a+1+b)$

$=\frac{1}{4}(5+\frac{1+b}{1+a}+\frac{4+4a}{1+b})\geqslant\frac{1}{4}(5+2\sqrt{\frac{1+b}{1+a}\cdot\frac{4+4a}{1+b}})=\frac{9}{4}$.

等号成立条件为$\frac{1+b}{1+a}=\frac{4+4a}{1+b}$，而$a+b=2$，所以$a=\frac{1}{3},b=\frac{5}{3}$. ……………………………5 分

（Ⅱ）由均值不等式得$a^2b^2+a^2\geqslant 2a^2b,a^2b^2+b^2\geqslant 2b^2a,a^2+b^2\geqslant 2ab$.

三式相加得$2a^2b^2+2a^2+2b^2\geqslant 2a^2b+2ab^2+2ab=2ab(a+b+1)$,

所以$a^2b^2+a^2+b^2\geqslant ab(a+b+1)$. ……………………………………………………………10 分